2.9.21 Logaritmické rovnice III

Př. 1: Vyřeš rovnici $\frac{1-2\log x}{3+\log x}=\frac{4-2\log x}{5+\log x}$.

$\frac{1-2y}{3+y}=\frac{4-2y}{5+y}$ $/(3+y)(5+y)$ $(1-2y)(5+y)=(4-2y)(3+y)$

$5+y-10y-2y^2=12+4y-6y-2y^2$ $5-9y=12-2y$ $-7y=7$ $y=-1$

$y=\log x=-1$ $\log x=\log 10^{-1}$ $x=0,1$ $K=\{0,1\}$

Př. 2: Vyřeš rovnici $3\log_4 x(2\log_4 x-1)=2(1-\log_4 x)$.

Substituce: $y=\log_4 x$ $3y(2y-1)=2(1-y)$ $6y^2-3y=2-2y$ $6y^2-y-2=0$

$$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 6\cdot(-2)}}{2\cdot 6}=\frac{1\pm 7}{12}$$

$y_1=\frac{1+7}{12}=\frac{2}{3}$ $y_2=\frac{1-7}{12}=-\frac{1}{2}$

Návrat k původní proměnné:

$\log_4 x_1=\log_4 4^{\frac{2}{3}}$ $x_1=\sqrt[3]{16}$ $\log_4 x_2=\log_4 4^{-\frac{1}{2}}$ $x_2=\frac{1}{2}$

Př. 3: Uprav následující logaritmy na výrazy, které obsahují neznámou pouze ve výrazu $\log_a x$:

a) $\log_2 8x$ b) $\log_9 \frac{x}{\sqrt{3}}$ c) $\log x^3$ d) $\log_2 \frac{4}{x^3}$

e) $\log 100x^3$ f) $2\log_4 4x^3$ g) $\log_2^2 2x$ h) $\log_3^2 9x^3$

a) $\log_2 8x=\log_2 8+\log_2 x=3+\log_2 x$ b) $\log_9 \frac{x}{\sqrt{3}}=\log_9 x-\log_9 \sqrt{3}=\log_9 x-0,25$

c) $\log x^3=3\log x$ d) $\log_2 \frac{4}{x^3}=\log_2 4-\log_2 x^3=2-3\log_2 x$

e) $\log 100x^3=\log 100+\log x^3=2+3\log x$

f) $2\log_4 4x^3=2(\log_4 4+\log_4 x^3)=2(1+3\log_4 x)=2+6\log_4 x$

g) $\log_2^2 2x=(\log_2 2x)^2=(\log_2 2+\log_2 x)^2=(1+\log_2 x)^2$

h) $\log_3^2 9x^3=(\log_3 9x^3)^2=(\log_3 9+\log_3 x^3)^2=(2+3\log_3 x)^2$

Př. 4: Vyřeš rovnice:

a) $2\log_3 9x+\log_3 \frac{1}{x}=\log_3 x^3+\log_3 27$

b) $\log_2 \sqrt{x}+\log_2 2x^2-\log_2 3x^3=\log_2 \frac{1}{x^2}+\log_2 \frac{x^2}{3}$

c) $2\log 2x^2+4\log x^3+2\log 3=3\log x^4+2+\log x^2$

d) $\log_4(3x+2)-2\log_4 x=2-\log_4 8$

a) $2\log_3 9x+\log_3 \frac{1}{x}=\log_3 x^3+\log_3 27$ $2(2+\log_3 x)-\log_3 x=3\log_3 x+3$

Substituce: $y=\log x$ $2(2+y)-y=3y+3$ $4+2y-y=3y+3$ $1=2y$

$y=\log_3 x=\frac{1}{2}$ $\quad\log_3 x=\log_3 3^{\frac{1}{2}}$ $\quad x=\sqrt{3}$ $\quad K=\{\sqrt{3}\}$

b) $\log_2\sqrt{x}+\log_2 2x^2-\log_2 3x^3=\log_2\frac{1}{x^2}+\log_2\frac{x^2}{3}$ Podmínky: $x>0$.

$\log_2 x^{\frac{1}{2}}+\log_2 2+\log_2 x^2-\left(\log_2 3+\log_2 x^3\right)=\log_2 x^{-2}+\log_2 x^2-\log_2 3$

$0,5\log_2 x+1+2\log_2 x-\log_2 3-3\log_2 x=-2\log_2 x+2\log_2 x-\log_2 3$

$-0,5\log_2 x+1-\log_2 3=-\log_2 3$ $\quad -0,5\log_2 x=-1$ $\quad \log_2 x=2$

$\log_2 x=\log_2 2^2$ $\quad x=4$ $\quad K=\{4\}$

c) $2\log 2x^2+4\log x^3+2\log 3=3\log x^4+2+\log x^2$ Podmínky: $x>0$.

$2\log 2x^2+4\log x^3+2\log 3=3\log x^4+2+\log x^2$

$2\left(\log 2+2\log x\right)+4\cdot 3\log x+2\log 3=3\cdot 4\log x+2+2\log x$

$2\log 2+4\log x+12\log x+2\log 3=12\log x+2+2\log x$

$2\log 2+2\log x+2\log 3=2$ $\quad 2\log x=2-2\log 2-2\log 3 \quad /:2$

$\log x=1-\log 2-\log 3$ $\quad \log x=\log 10-\log 2-\log 3$

$\log x=\log\frac{10}{2\cdot 3}$ $\quad \log x=\log\frac{5}{3}$ $\quad x=\frac{5}{3}$ $\quad K=\left\{\frac{5}{3}\right\}$

d) $\log_4(3x+2)-2\log_4 x=2-\log_4 8$ Podmínky: $3x+2>0$, $x>0$.

$\log_4(3x+2)-\log_4 x^2=\log_4 16-\log_4 8$ $\quad \log_4\left(\frac{3x+2}{x^2}\right)=\log_4\frac{16}{8}$

$\frac{3x+2}{x^2}=2$ $\quad 3x+2=2x^2$ $\quad 2x^2-3x-2=0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm 5}{4}$$

$x_1=\frac{3+5}{4}=2$ $\quad x_2=\frac{3-5}{4}=-\frac{1}{2}$ (nevyhovuje podmínkám) $\quad K=\{2\}$

Př. 5: Vyřeš rovnici: $\log x^2\left(\log x+1\right)=3+\log x^{-3}$.

$\log x^2\left(\log x+1\right)=3+\log x^{-3}$ $\quad 2\log x\left(\log x+1\right)=3-3\log x$

Substituce: $y=\log x$ $\quad 2y\left(y+1\right)=3-3y$ $\quad 2y^2+2y=3-3y$ $\quad 2y^2+5y-3=0$

$$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2}=\frac{-5\pm 7}{4}$$

$y_1=\frac{-5+7}{4}=\frac{1}{2}$ $\quad y_2=\frac{-5-7}{4}=-3$

Návrat k původní proměnné:

$\log x_1=\log 10^{\frac{1}{2}}$ $\quad x_1=\sqrt{10}$ $\quad \log x_2=\log 10^{-3}$ $\quad x_2=0,001$

$K=\left\{\sqrt{10};0,001\right\}$

Př. 6: Petáková:
strana 35, cvičení 14 b), d)
strana 36, cvičení 15 b)
strana 36, cvičení 16 b), d)